

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X + Y) &= E[(X + Y) - E(X + Y)]^2 = E[(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2 = \\ &= E[(X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2(X - E(X)) * (Y - E(Y))] = \\ &= \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) + 2 * \text{COV}(X, Y) \end{aligned}$$

che nel caso di v.c. indipendenti si riduce a $\text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y)$

VARIANZA DEL PRODOTTO DI V.C.

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X * Y) &= E[X * Y - E(X * Y)]^2 = E[X^2 * Y^2 - 2E(X * Y) * X * Y + [E(X * Y)]^2] = \\ &= E[X^2 * Y^2] - [E(X * Y)]^2 = \text{media del prodotto dei quadrati} - \text{quadrato della media} \\ &\text{del prodotto.} \end{aligned}$$

Dalla definizione di covarianza si può scrivere $\text{COV}(X^2, Y^2) = E[X^2 * Y^2] - E(X^2) * E(Y^2)$ e quindi il primo termine dell'espressione della varianza del prodotto vale

$$E[X^2 * Y^2] = \text{COV}(X^2, Y^2) + E(X^2) * E(Y^2)$$

Ancora dalla definizione di covarianza $E(X * Y) = \text{COV}(X, Y) + E(X) * E(Y)$ e il secondo termine dell'espressione della varianza può essere scritto come

$$[E(X * Y)]^2 = [\text{COV}(X, Y) + E(X) * E(Y)]^2 \text{ e pertanto si ha:}$$

$$\text{VAR}(X * Y) = \text{COV}(X^2, Y^2) + E(X^2) * E(Y^2) - [\text{COV}(X, Y) + E(X) * E(Y)]^2$$

che nel caso di variabili indipendenti si riduce a

$$\text{VAR}(X * Y) = E(X^2) * E(Y^2) - [E(X * Y)]^2 = \text{prodotto delle medie dei quadrati} - \text{quadrato della media del prodotto.}$$

Per mettere in luce le singole varianze delle variabili si può sostituire il prodotto delle medie dei quadrati come segue:

$$\begin{aligned} \text{dalla espressione della varianza si ha } \text{VAR}(X) &= E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2E(X) * X + [E(X)]^2] = \\ \text{VAR}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ da cui } E(X^2) = \text{VAR}(X) + [E(X)]^2. \end{aligned}$$

Quindi l'espressione analitica della varianza del prodotto di v.c. diventa

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X * Y) &= \text{COV}(X^2, Y^2) + [\text{VAR}(X) + [E(X)]^2] * [\text{VAR}(Y) + [E(Y)]^2] - \\ &- [\text{COV}(X, Y) + E(X) * E(Y)]^2 \end{aligned}$$

Questa espressione appare di complessa lettura ed un po' dispersiva; può essere opportuno raggruppare alcuni termini in modo da sintetizzare gli elementi essenziali:

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X * Y) &= \text{COV}(X^2, Y^2) + \text{VAR}(X) * \text{VAR}(Y) + \text{VAR}(Y) * [E(X)]^2 + \text{VAR}(X) * [E(Y)]^2 \\ &+ [E(X)]^2 * [E(Y)]^2 - [\text{COV}(X, Y)]^2 - 2 * E(X) * E(Y) * \text{COV}(X, Y) - [E(X)]^2 * [E(Y)]^2 = \\ &= [\text{VAR}(X) * \text{VAR}(Y) + \text{VAR}(X) * [E(Y)]^2 + \text{VAR}(Y) * [E(X)]^2] + \\ &+ [\text{COV}(X^2, Y^2) - [\text{COV}(X, Y)]^2 - 2 * E(X) * E(Y) * \text{COV}(X, Y)] = \\ &= \text{termini e varianze} + \text{termini e covarianze} \end{aligned}$$