

Come fa a stare in piedi un tetraedro?

di Gabrielle Lolli

Claudio Bartocci
**UNA PIRAMIDE
DI PROBLEMI**
STORIE DI GEOMETRIA
DA GAUSS A HILBERT
pp. XVIII-387, € 29,
Raffaello Cortina, Milano 2012

In questo libro Claudio Bartocci apparentemente racconta la storia, apparentemente breve, di un problema di geometria. Nel 1900, nella lista di problemi matematici per il secolo entrante presentata al congresso internazionale di Parigi, David Hilbert (1862-1943) lo enunciava al terzo posto; nel 1903 il suo allievo Max Dehn (1878-1952) lo risolveva. Il problema ha un sapore di cose antiche, può essere compreso da chiunque ricordi qualche nozione della geometria imparata a scuola; riguarda i tetraedri, Dante li chiamava tetragoni, cioè poliedri con quattro facce triangolari; si chiede se esistono due tetraedri di basi uguali (cioè della stessa area) e altezze uguali che non possono essere scomposti in tetraedri a due a due congruenti (o una condizione più generale che non è il caso di ricordare). Due figure nello spazio sono congruenti se si possono ottenere l'una dall'altra per traslazioni, rotazioni, riflessioni. In pratica si chiede se due di questi solidi hanno uguale volume solo se sono equiscomponibili in tetraedri: come in un puzzle, se ne disseziona uno e si rimontano i pezzi a costruire l'altro. Una possibilità del genere si verifica nel piano, per poligoni e triangoli, considerando l'area invece del volume. La soluzione di Dehn è negativa.

Merita interessarsi di un simile problema, presentarlo addirittura come un problema per il secolo e, soprattutto, scrivere oggi un libro sulla sua storia? Bartocci in verità lo ha scelto con fine sensibilità, perché la soluzione del problema fa pensare a quegli episodi delle recenti guerre nei quali nel corso di una breve incursione si consuma una potenza di fuoco superiore a quella di tutta la seconda guerra mondiale, mentre le vittime controbattono con armi rudimentali manuali (se la soluzione fosse stata positiva, la si sarebbe dovuta ottenere con una costruzione euclidea). Per descrivere le armi usate nell'attacco, Bartocci non può fare a meno di percorrere la storia della geometria nel corso di tutto l'Ottocento, con puntate ben più indietro, al Seicento e a Euclide: geometrie non euclidee, spazi a più dimensioni, geometria proiettiva, geometria differenziale, la definizione dei numeri reali e la continuità, la topologia, la sistemazione assiomatica dello stesso Hilbert sono alcune delle acquisizioni emerse nel breve volgere del se-

colo, tutte rilevanti per la soluzione del problema; non è un fatto raro nella storia della matematica. Dalla posizione di un problema elementare nasce e cresce e si allarga una ricchezza di temi e pensieri e nuove ricerche, come una piramide rovesciata, conclude Bartocci. Viene da chiedersi come la piramide stia in piedi: non certo infilando la punta nel terreno, ché si riproporrebbe un'idea di fondamenti sbagliata; l'unico modo per una piramide per stare dritta sul suo vertice, se possiamo arricchire l'immagine, è quelle di ruotare, come una trottola, e infatti la piramide descritta da Bartocci è un vortice di idee.

Il libro non è tuttavia una storia della geometria, ma si presenta dichiaratamente come una passeggiata, un'esplorazione nella giungla, fuori sentiero ("Gli avventurosi percorsi di ricerca che a questi teoremi conducono"), con "digressioni" necessarie e ricche di incontri inaspettati con esseri strani, fantastici; avremmo potuto seguire l'autore in altri percorsi della giungla, l'analisi, o l'algebra, e in ogni caso trovare analoghe meraviglie, perché la matematica moderna è nata in quel secolo, ed è nata in tutte le sue articolazioni con le stesse caratteristiche, che ancora adesso sono difficili da spiegare; e avremmo apprezzato ancor più le "contaminazioni concettuali" che stanno a cuore all'autore. La scelta della geometria è comunque indovinata, perché mai come nell'Ottocento è stato giusto dire "geometria" per "matematico": matematica, fisica e filosofia sono integrate nelle ricerche e nelle ricadute della geometria, come traspare qui dall'esposizione, più che nelle altre discipline. Un fatto che sorprenderà qualche lettore è per esempio l'importanza dell'astronomia e della cartografia nella nascita delle geometrie non euclidee.

Forse l'impressione più forte che può restare nel lettore è che molti personaggi siano fuori di testa, non secondo l'abusato cliché, ma nel senso che disinvoltamente propongono come matematica idee e forme di ragionamento che fino ad allora non erano matematica, e usano un linguaggio che oggi come allora non sembra matematico; e non sono tacitati, le loro idee sono accolte e considerate, e al massimo criticate per migliorarle e renderle comunicabili. Perché sono tutti presi dal fuoco della libera invenzione, quella che Georg Cantor (1845-1918) teorizzerà parlando di matematica libera. Un esempio, tra i tanti contenuti in questo volume, si trova spulciando nella geometria proiettiva, dove si definiscono enti immaginari come "enti di ragione senza esistenza, ma del quale si possono nondimeno supporre certe pro-

prietà (...) e al quale si applicano gli stessi ragionamenti che a un ente reale o palpabile". Jean-Victor Poncelet (1788-1867) parla di "cambiare la configurazione [di una figura] attraverso un movimento progressivo e continuo" con variazioni insensibili, conservando le relazioni o proprietà metriche. Per lui "immaginario" è "un oggetto che da assoluto o reale che era in una certa figura, sarà diventato completamente impossibile o non costruibile nella figura correlata [ottenuta con il movimento progressivo e continuo]". Bartocci ricorda l'ironia di Bertrand Russell (1872-1970): "Il metafisico che inventasse qualcosa di tanto insensato quanto i punti ciclici [immaginari all'infinito] sarebbe cacciato a suon di fischi, ma il matematico può passarla liscia impunemente".

Bartocci resiste alla tentazione di teorizzare su cosa è diventata la matematica, lascia parlare i fatti, come li ha raccontati, ma qualche considerazione viene spontanea. Per esempio, in tanti campi in modo indipendente si assiste al passaggio da un livello di problemi a uno superiore, in algebra dai numeri alle proprietà delle operazioni, in geometria dai punti alle trasformazioni dello spazio. Oggetto della matematica diventano i concetti, e la creazione e manutenzione dei concetti è diversa dal calcolo e dalla deduzione, anche se ne fa uso, e libera da un'ontologia restrittiva. Si scopre che l'astratto facilita la soluzione di problemi concreti, o è addirittura necessario.

L'esposizione è selettiva rispetto alla storia complessiva, taglia via molto, ma molto resta (una caratteristica paradossale degli insiemi infiniti). Bartocci non fa sconti; molte spiegazioni sono relegate nelle note, ma il discorso non concede nulla alla divulgazione, vuole fare capire; qualche volta per spiegare un concetto o una definizione l'autore li riformula in termini moderni, ma in tal caso la comprensione diventa anche più difficile, perché chi è che padroneggia tanta matematica? Bartocci ha un'erudizione spaventosa, ma su conoscenze importanti; a 225 pagine di testo si affiancano ben 82 pagine di note, e 60 pagine di bibliografia. In più, per Bartocci i protagonisti della matematica non sono nomi ma persone, delle quali appena può ci descrive la situazione e i problemi umani (per esempio per Poncelet la guerra in Russia, nel 1812, e i quindici mesi di prigionia durante la quale, in totale isolamento, riuscì a ricomporre le sue conoscenze ed elaborare le sue idee innovative).

Vagabondare nei sentieri della matematica concettuale dell'Ottocento è quindi anche piacevole, con un velo di tristezza al pensiero che tali meraviglie della creatività umana rischiano di essere destinate all'oblio, non si studiano più nemmeno all'università; libri come questo hanno una funzione vicaria, tengono viva la memoria.

lolloi@dm.unito.it

G. Lolli insegna logica matematica all'Università di Torino

Il corredo biologico alla nascita

di Giuseppe O. Longo

Giorgio Vallortigara
LA MENTE CHE SCODINZOLA
STORIE DI ANIMALI E DI CERVELLI
pp. 216, € 18,
Mondadori, Milano 2011

Per molto tempo si è ritenuto che i bimbi venissero al mondo pressoché privi di conoscenze. *Tabulae rasae* sulle quali l'esperienza e l'apprendimento avrebbero tracciato i loro segni. La ricerca cognitiva degli ultimi anni ha completamente demolito questo punto di vista. È una delle affermazioni più importanti e pregni di conseguenze di questo libro affascinante, che si legge come un racconto e che illustra con una raffinatezza che non scade mai in pedanteria la storia naturale delle menti, descrivendo le modalità che la selezione ha inscritto nel funzionamento del cervello umano e animale. Si scopre così che i piccoli nostri e di altre specie animali nascono con un robusto corredo di dotazioni biologico-cognitive, che rappresentano il risultato di una sorta di apprendimento di specie con cui interagisce poi l'apprendimento dell'individuo.

Di questo corredo fanno parte: la fisica intuitiva (compresa l'impenetrabilità dei corpi, la necessità di un agente come causa del moto, e in genere una vigorosa nozione di causalità); alcune raffinate nozioni relative al numero, che consentono operazioni aritmetiche elementari su insiemi poco numerosi; alcune cognizioni spaziali (compresa la metrica e la distinzione destra-sinistra); la capacità di distinguere nettamente oggetti inanimati e animati (questi ultimi mossi da scopi e pervasi da intenzioni ostili o amichevoli), con una netta attrazione verso gli oggetti animati, attrazione che è alla base della vita di relazione e prim'ancora delle strategie di corteggiamento, caccia e fuga.

Questi lasciti dell'evoluzione sono iscritti nella nostra costituzione biologica e hanno effetti importanti sull'interazione con il mondo: in primo luogo filtrano le esperienze e le percezioni; in secondo luogo rendono possibile e facilitano l'apprendimento dei fenomeni fisici e sociali a livello individuale; in terzo luogo possono essere d'ostacolo all'interpretazione scientifica del mondo quando essa si discosti dal "senso comune", cioè appunto dalle conoscenze ereditate. L'ultimo punto potrebbe spiegare le difficoltà che gli umani mediamente incontrano nell'accettare il darwinismo e la loro propensione verso il soprannaturale e le superstizioni: si tratta di tenaci residui evolutivi che si oppongono alle "irragionevoli" spiegazioni della scienza, ma sono residui che hanno avuto e in parte hanno ancora un elevato valore di sopravvivenza nel mondo.

La funzione di filtro delle conoscenze ereditate fa sì che, come aveva già notato Warren McCulloch nel suo articolo *Che cosa l'occhio della rana dice al cervello della rana*, ogni specie percepisce il

mondo a modo suo, sicché non ha molto senso dire che la selezione naturale ha plasmato le nostre percezioni per fornirci un'immagine veridica del mondo: "Piuttosto per ingannarci sufficientemente bene per sopravvivere nel mondo". Ovviamente l'immagine della realtà che ciascuna specie possiede è sintonizzata con il mondo, cioè è abbastanza in accordo con esso da evitarle errori grossolani e fatali (altrimenti non saremmo qui a discuterne), e in questo senso tutte le specie sono egualmente evolute. Noi occidentali, forse seguendo l'esempio per certi versi nefasto dei Greci, abbiamo esagerato l'importanza della verità: ciò che conta è la vita (Kafka nel *Processo* afferma che la logica è ferrea, ma non resiste a un individuo che vuol vivere). Resta il problema di come lo sperimentatore percepisca il mondo del laboratorio e quale valore di verità o conformità al mondo abbiano, di conseguenza, le sue asserzioni. Più in generale resta il problema della conformità della scienza al mondo, visto che anche la scienza è costruita a partire dalla nostra struttura biologica ed è da essa filtrata (è un po' il problema che si poneva Eugene Wigner quando parlava di "irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali").

Tra questi fondamentali o primitivi biologico-mentali, Vallortigara elenca la propensione alle spiegazioni causali, basata sulla distinzione primaria tra oggetti inerti e oggetti animati, da cui scaturiscono rispettivamente la fisica intuitiva (largamente condivisa con altre specie) e la psicologia intuitiva; un dualismo primitivo che distingue tra menti e corpi e che è alla base della nostra credenza negli spiriti, negli dei e nella vita dopo la morte; un'ipertrofia del sistema che tratta gli oggetti animati, in particolare gli altri membri della nostra specie, e la "conseguente inclinazione a inferire e ad attribuire desideri e obiettivi laddove questi non esistono. Tale ipertrofia costituirebbe il fondamento cognitivo della nostra propensione al creazionismo", che dunque è profondamente radicato in noi, tanto da sfidare con successo le spiegazioni alternative (l'evoluzione, di cui pure l'attaccamento al creazionismo è figlio). Inoltre, pare che "l'atteggiamento teleologico sia parte di un adattamento innato a trattare i fenomeni del mondo naturale-biologico", per cui a domande del tipo "a che serve un leone?" i bambini rispondono "per andare allo zoo". Insomma "i bambini concepiscono i fenomeni naturali come qualcosa di progettato intenzionalmente, ma da entità che non sono umane", da cui la conclusione per certi versi sorprendente: "Le credenze soprannaturalistiche non debbono essere considerate sinonimo di immaturità mentale, bensì il sottoprodotto naturale di una mente che si è evoluta per pensare in termini di obiettivi e intenzioni".

giuseppe.longo41@gmail.com

G. Longo insegna teoria dell'informatica all'Università di Trieste