

menti instabili all'aumentare del valore dell'utilità marginale. In particolare a parità di valori nei parametri e nelle condizioni iniziali, il modello logit dinamico in termini assoluti mostra un andamento nel tempo più chiaramente irregolare rispetto al logit in termini relativi.

## 2. Dinamiche caotiche nei modelli logit con ritardo

In questo paragrafo verrà esaminato il comportamento dinamico emergente da un modello logit con ritardo. In altre parole si analizzerà la crescita della popolazione  $P_j$  (in percentuale) la cui evoluzione in dato periodo ( $t$ ) è governata dalla popolazione del tempo precedente ( $t-1$ ). Assumiamo per semplicità il caso degenere, eliminando l'influenza del termine di interazione nell'espressione (4) ed incorporiamo l'effetto ritardo nell'equazione (9) come segue:

$$P_{j,t+1} = N P_{j,t} \left(1 - \frac{N-1}{N} P_{j,t-1}\right) \quad (13)$$

È evidente che il nuovo modello logit-degenere (13) (in termini discreti) contiene un termine non lineare che regola la dimensione della popolazione attraverso l'effetto «ritardo» della generazione precedente.

L'equazione con ritardo (13) può essere poi trasformata in un sistema bidimensionale (si veda anche ad es. Nijkamp, Reggiani, 1991), introducendo la seguente variabile ausiliaria:

$$Q_{j,t} = \epsilon P_{j,t-1} \quad (14)$$

cosicché l'equazione (13) risulta equivalente a:

$$\begin{aligned} P_{j,t+1} &= N P_{j,t} \left(1 - \frac{N-1}{N\epsilon} Q_{j,t}\right) \\ Q_{j,t+1} &= \epsilon P_{j,t} \end{aligned} \quad (15)$$

Il sistema (15) rappresenta un caso speciale della classe di relazioni di tipo preda-predatore.  $Q_{j,t}$  (predatore) può essere infatti interpretato come la mancanza (cumulata) di disponibilità dell'alternativa  $j$  (ad esempio, la mancanza di capacità nei mezzi di trasporto) la cui influenza è la riduzione della popolazione  $P_j$  (preda) attraverso il parametro  $N-1/\epsilon$ ;  $\epsilon \leq 1$  è il tasso secondo cui  $Q_{j,t}$  aumenta in relazione alla popolazione del tempo precedente.

L'analisi di stabilità relativa al sistema (15) mostra infine un pun-