

$$x = f(t)$$

$$y = f(t)$$

È facile, però, inventare casi ‘patologici’ di luoghi geometrici, come sopra definiti, che sfuggono al concetto intuitivo di curva, come per esempio la funzione di Dirichlet:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{per } x \text{ razionale} \\ f(x) &= 1 && \text{per } x \text{ irrazionale} \end{aligned} \quad (1)$$

Essa non è integrabile nel senso di Riemann, caratteristica che, invece, appare quasi ovvia per una curva nel senso intuitivo del termine, ma richiede una nuova definizione del concetto di integrale: quella data da Lebegues; essa, addirittura, non è neppure disegnabile con carta e matita né, tantomeno, sullo schermo di un computer.

Si può tentare di ovviare a questa difficoltà, imponendo la continuità delle funzioni di definizione. “Intuitivamente, una curva continua può essere immaginata come il percorso di un punto che si muove con continuità e questa nozione un po’ vaga reca con sé i concetti di ‘sottile’ e di ‘unidimensionale’” (Simmons, 1963, p. 341, nostra traduzione).

Una definizione più precisa del concetto geometrico intuitivo di curva è quella di Jordan del 1887 (si veda, per esempio, Simmons, 1963), secondo la quale se f è una mappa continua dell’intervallo chiuso $I=[a,b]$ nel piano euclideo, allora $f(I)$ è una curva continua. In parole più semplici, le funzioni in (1) definiscono una curva nel senso intuitivo del termine se, oltre ad essere continue, fanno corrispondere ad ogni punto (x_0, y_0) della curva uno ed un solo valore di t (biunivocità), in modo che, presi due valori di t via via più vicini fra loro, corrispondano ad essi punti sempre più prossimi appartenenti all’oggetto che chiamiamo curva; si ammette, per il caso delle curve chiuse, che solo ai due estremi dell’intervallo di definizione di t corrispondano due punti coincidenti dell’arco. Per esempio, la definizione parametrica di una circonferenza è:

$$x = \cos(\alpha)$$

$$y = \sin(\alpha)$$

con $0 < \alpha < 2\pi$; ai due estremi dell’intervallo di definizione di α corrisponde lo stesso punto della circonferenza.