

avere a disposizione la tecnica di calcolo delle soluzioni analitiche delle equazioni (o dei sistemi di equazioni) differenziali descrittivi l'evoluzione di un sistema, l'effettiva evoluzione che si ottiene dipende strettamente dalle condizioni iniziali. Con quale precisione sono note le condizioni iniziali? E, ancora, loro piccole variazioni, il che può voler dire anche un aumento della precisione della conoscenza delle condizioni iniziali, come influiscono sull'evoluzione determinata? La funzione che la rappresenta, soluzione delle equazioni differenziali, è stabile o instabile? In altre parole, la traiettoria evolutiva del sistema è sempre meglio determinata, cioè subisce variazioni sempre più piccole all'aumentare della precisione nella determinazione delle condizioni iniziali (caso dell'equilibrio stabile) oppure al progressivo diminuire dell'incertezza delle condizioni iniziali le variazioni della traiettoria divergono sempre di più fra loro (caso dell'equilibrio instabile)? In realtà, in base al teorema di Kolmogorov citato in 5.3. possiamo dire con Arecchi (1986, pp. 67-68): "Se accettiamo che lo spazio-tempo sia continuo, dobbiamo necessariamente troncare, ad un certo punto, l'infinita sequenza delle cifre che definiscono una coordinata 'reale' ... ci sono sistemi, anche semplici, in cui le traiettorie che emergono da condizioni iniziali prossime divergono esponenzialmente. Questa estrema sensibilità alle condizioni iniziali trasporta la nostra incertezza dalle cifre troncate a quelle significative, causando un comportamento imprevedibile in linea di principio: un comportamento caotico".

Il fondamentale teorema di Cauchy, certamente, assicura l'esistenza e l'unicità, sotto condizioni molto larghe, dell'integrale generale di un'equazione differenziale. Tuttavia, poiché può succedere che una modifica arbitrariamente piccola delle condizioni iniziali finisca per determinare un integrale particolare diverso, quindi un'evoluzione diversa, e diversa in maniera imprevedibile, allora l'impossibilità di effettuare misure infinitamente precise implica l'impossibilità di fare previsioni. D'altronde, essendo i numeri reali, cioè i possibili risultati delle misurazioni, percepiti dalla mente umana come appartenenti ad un continuo, operativamente l'acquisizione di dati iniziali infinitamente precisi richiederebbe un tempo infinito ed una memoria infinita: necessariamente, qualsiasi misura, per essere gestibile, deve essere limitata ad un numero massimo di cifre decimali.

■ L'argomento è riconducibile a quello della 'stabilità di Ljapunov dello