

In base a semplici considerazioni di geometria elementare, si può facilmente dimostrare che l'area della figura che si ottiene nelle successive infinite iterazioni è esprimibile come sommatoria di infiniti addendi, i cui primi termini sono:

$$A = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 + \frac{4\sqrt{3}}{27}a^2 + \dots$$

Il primo termine della sommatoria a secondo membro è l'area del triangolo equilatero iniziale di lato $3a$ (iterazione $n=0$); il secondo termine è il triplo dell'area di ciascuno dei tre triangoli equilateri di lato a che risultano, per così dire, aggiunti su ciascuno dei lati del triangolo iniziale nell'iterazione $n=1$; il terzo termine è dodici volte l'area di ciascuno dei dodici triangoli equilateri di lato $a/3$ aggiunti nell'iterazione $n=2$, e così via. Si osserva immediatamente che, escluso il primo termine, gli addendi successivi a questo costituiscono, anch'essi, i termini di una progressione geometrica infinita di ragione $4/9$, convergente, la cui somma è:

$$S = \frac{27\sqrt{3}}{20}a^2$$

L'area totale, pertanto, risulta:

$$A = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 + S = \frac{18\sqrt{3}}{5}a^2$$

Come si osserva facilmente, essa è $8/5$ del valore del primo termine della sommatoria, cioè solo 1,6 volte l'area del triangolo equilatero di partenza. La curva di Koch, quindi, è una curva piana chiusa di lunghezza infinita che racchiude un'area finita.

Ulteriori considerazioni riferite al concetto di dimensione frattale, sia in generale sia con riferimento alla curva discussa, sono contenute nella nota dei curatori riportata a pag. 227 di questo volume 1. In base ad esse, si ricava facilmente che la dimensione di Hausdorff della curva di Koch è:

$$D = -\log 4^n / \log(1/3^n) = \log 4 / \log 3 \approx 1,2618$$