

- valori di soglia), e così via. Si osserva, in altre parole, un insieme infinito e limitato di costanti  $k_n$ , le quali definiscono successivi intervalli di riferimento per il parametro  $k$ . In generale, per  $k_n < k < k_{n+1}$ , si ha che la variabile  $x(t)$  segue un'evoluzione che la porta, asintoticamente, a compiere oscillazioni fra i  $2^n$  stati di un attrattore, i cui valori dipendono solo da  $k$  e non dal valore iniziale di  $x(t)$ ;
4. se il valore di  $k$  supera il valore critico  $k_\infty$ , limite e punto di accumulazione della successione delle  $k_n$  (determinato per mezzo di simulazioni numeriche:  $k_\infty \approx 3,569945\dots$ ), allora il numero degli stati generati dalle successive duplicazioni fra cui  $x(t)$  oscilla, crescente con  $n$ , è talmente alto e gli stati sono talmente vicini fra loro, da rendere impossibile l'individuazione di una traiettoria: è il comportamento imprevedibile, è il caos deterministico.

Per  $k < k_\infty$ , come detto, gli stati asintotici componenti l'attrattore, fra i quali avvengono le oscillazioni, sono indipendenti dal valore iniziale di  $x(t)$ , mentre invece, in condizione di caos, cioè per  $k > k_\infty$ , non si osservano attrattori, il valore di  $x(t)$  alla  $n$ -esima iterazione dipende dal suo valore iniziale e risulta  $a(k) < x(t) < b(k)$ , dove  $a(k)$  tende a 0 al crescere di  $k$ , mentre  $b(k)$ , sempre al crescere di  $k$ , tende a 1.

Inaspettatamente, al crescere di  $k$  oltre  $k_\infty$ , quindi nella zona caotica, compaiono zone in cui si osserva nuovamente il comportamento oscillatorio: all'inizio, questo avviene fra tre stati stabili di un attrattore; successivamente, ciascuno di questi si duplica secondo uno schema del tutto analogo a quello descritto nei punti precedenti, seppur per diversi valori di  $k$ , generando così nuovamente il caos. Riconosciamo in questo identico ripetersi della fenomenologia a diverse scale (autosomiglianza) la caratteristica fondamentale della struttura di un frattale. Tale fenomeno è particolarmente evidente in un intorno di  $k' \approx 3,84\dots$  Per  $k=4$ , il comportamento caotico di  $x(t)$  è esteso a tutto l'intervallo  $0 < x(t) \leq 1$ .

Riguardo ai valori delle  $k_n$ , fra l'altro, sussiste il seguente limite, detto numero di Feigenbaum (Feigenbaum, 1978):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \approx 4,6692016609\dots$$