5.5. Digressione su alcuni esempi di caos deterministico

La dinamica di sistemi anche apparentemente molto semplici può avere, in certe condizioni, soluzioni talmente complicate, pur essendo retta da equazioni deterministiche, che questi sistemi appaiono come se il loro comportamento fosse del tutto casuale. Scrive il fisico Giulio Casati: "Può apparire quasi scandaloso che, a distanza di tre secoli dalla formulazione delle equazioni di Newton, non sappiamo ancora se il nostro sistema solare sia stabile e se la Terra continuerà a girare attorno al Sole, oppure se andrà a cadervi sopra o, viceversa, abbandonerà la propria orbita per perdersi negli spazi infiniti" (Casati, 1989, p. 409).

La difficoltà è duplice: da una parte, vi è la difficoltà, o talora l'impossibilità, di risolvere analiticamente le (o il sistema di) equazioni differenziali che descrivono il fenomeno; dall'altra, vi è il fatto, ben più significativo, che anche ammettendo che il futuro di un sistema sia determinato dal suo stato attuale, se questo non è completamente noto (e, addirittura, se non è nemmeno conoscibile!), non è possibile, di fatto, prevedere la sua evoluzione futura.

La prima questione non riflette altro che la nostra ignoranza: in linea di principio, soluzioni analitiche possono anche non essere indispensabili; come è noto, esistono numerosi metodi di risoluzione numerica in grado di fornire soluzioni con la precisione desiderata. La seconda difficoltà, invece, è di significato ben più profondo, perché, anche ammettendo di

teorema di incompletezza) e che, inoltre, la consistenza stessa del sistema è una delle asserzioni indimostrabili a partire dagli assiomi (secondo teorema di incompletezza). In termini più approssimati, semplificando un po' la questione, la matematica non è dimostrabile 'vera' dal proprio interno. I teoremi di Gödel furono la risposta al diffuso desiderio, nell'epoca a cavallo fra '800 e '900, di definire rigorose basi formali per la matematica, culminato l'8 agosto 1900, al secondo Congresso Internazionale di Matematica di Parigi, quando David Hilbert, professore all'Università di Gottinga, tenne una conferenza nella quale, facendo il punto della situazione della materia, enunciò un elenco di ventitré problemi irrisolti, come oggetto di ricerca per il futuro. Il secondo di quei problemi chiedeva se fosse possibile dimostrare che gli assiomi dell'aritmetica sono compatibili, cioè di dimostrare se, partendo da essi, non si può mai giungere, con un numero finito di passaggi logici, ad un risultato contraddittorio. Tale programma fu dimostrato irrealizzabile da Gödel. Per una presentazione in termini generali dei teoremi di Gödel, si veda il famosissimo testo di Nagel e Newman (1958), mentre una discussione più tecnica, invece, può essere trovata, per esempio, in Cutland (1980).