sottraendo da un continuo (il segmento iniziale) una classe densa di punti: nel caso dei numeri razionali, vengono sottratti i punti aventi distanza dall'estremo 0 del segmento espressa da numero irrazionale (l'insieme dei numeri irrazionali, come è noto, ha la potenza del continuo); nel caso dell'insieme di Cantor, vengono sottratti gli infiniti segmenti aperti, secondo il procedimento prima descritto, la somma totale delle lunghezze dei quali è, come abbiamo detto, 1, vale a dire come il segmento di partenza. Insomma, sembrerebbe che, sottraendo da un oggetto 'lungo' 1 un altro oggetto 'lungo' 1, si ottenga un terzo oggetto composto di infiniti punti 'numerosi' quanto quelli del segmento di partenza ed avente ancora la potenza del continuo, cioè non composto di punti isolati. Ma che cos'è? L'insieme di Cantor è un frattale avente dimensione di Hausdorff:

$$D = -\log 2^n/\log(1/3^n) = \log 2/\log 3 \approx 0{,}6309$$

Essa è la metà della dimensione di Hausdorff che si ricava per la curva di Koch; tale relazione non stupisce, avendo già osservato la parentela fra i due oggetti (su questa e su altre questioni di topologia ad essa collegate, si può vedere, per esempio, Simmons, 1963).

Le curve di Peano

Sono note come 'curve di Peano', dal nome del matematico Giuseppe Peano che si occupò di tale argomento negli anni intorno al 1890 (si vedano, ad esempio, Simmons, 1963, o Boyer, 1968), le curve continue definite da un algoritmo iterativo, che sono in grado di 'coprire' una superficie[1]. Uno tra i numerosi esempi che si possono dare, sia di curve chiuse sia di curve aperte, è il seguente. Si consideri un quadrato di lato 1 (iterazione 0), lo si divida in quattro quadrati uguali di lati 1/2 e si consideri la curva chiusa composta dai segmenti che congiungono i centri come indicato in figura 3 (iterazione n=1); si divida ulteriormente ciascuno dei quadrati ottenuti in quattro quadrati uguali di lato 1/4 e si congiungano i centri di essi con una spezzata, sempre come in figura 3 (iterazione n=2), e così via.

È intuitivo, ma si può anche dimostrare rigorosamente, che, al susseguirsi delle iterazioni e quindi al crescere del numero delle

[1] Tali curve sono chiamate anche 'curve di Hilbert che riempiono lo spazio'.